Simulazione della II prova
Tema di: MATEMATICA e FISICA
25 febbraio 2020

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

Problema 1. Assegnate due costanti reali a e b (con $b > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = \frac{t+a}{bt^2+1}.$$

1. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y), ha un massimo nel punto $B(1, \frac{1}{2})$.
2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 0$ e $b = 1$, studiare la funzione

$$q(t) = \frac{t}{t^2+1}$$

   e si determini la sua primitiva passante per il punto $A(0, 0)$.
3. Supponiamo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore. Sempre assumendo $a = 0$ e $b = 1$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.
4. Determinare la legge di un campo magnetico variabile $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t)$ che potrebbe generare la corrente $i(t)$ in un circuito quadrato di lato $l = 7\,\mathrm{cm}$, sapendo che la resistenza R del circuito è di $3\,\Omega$.

Problema 2. Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con q positivo) è fissata nell'origine O di un sistema di riferimento nel piano Oxy (dove x e y sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta r di equazione $y = 1$.

1. Supponendo che la carica Q_2 sia collocata nel punto $A(0, 1)$, provare che esiste un unico punto P del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 è nullo. Individuare la posizione del punto P e discutere se una terza carica collocata in P si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.
2. Verificare che, se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x, l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da

$$\mathcal{U}(x) = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}},$$

   dove k è una costante positiva (unità di misura: $\mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$).
3. Studiare la funzione $\mathcal{U}(x)$ per $x \in \mathbf{R}$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?
4. Determinare la primitiva di $\mathcal{U}^2(x)$ passante per il punto di massimo di $\mathcal{U}$.

Quesiti

1. Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - ax^2, & \text{per } x \le 1 \\ \dfrac{b}{x-3}, & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'.

2. Sia f una funzione pari e derivabile in $\mathbf{R}$, sia g una funzione dispari e derivabile in $\mathbf{R}$. Dimostrare che la funzione f' è dispari e che la funzione g' è pari. Fornire un esempio per la funzione f ed un esempio per la funzione g, verificando quanto sopra.

3. Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.
   - Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?
   - Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

4. Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \dfrac{s(x)}{t(x)}$, dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione:
   - incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;
   - abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;
   - passi per il punto $P(7, 10)$.

   Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.

5. Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.
   - Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ e la superficie S sono secanti.
   - Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S.

6. Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \ge 0$, da $x(t) = \dfrac{1}{9}t^2(\dfrac{1}{3}t + 2)$, dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

7. Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.
   a. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.
   b. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.

8. Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge $B(t) = B_0(2 + \sin(\omega t))$, dove t indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato l. Detta R la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante t. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.